

Grundlagen der Elektrotechnik ausgewählte Kapitel

ergänzende Beiträge zur Vorlesung
zum Thema

Schaltvorgänge

Doz. Wolfgang Stuchlik
DLR Lampoldshausen, Abt. VEA

DHBW - MOS WiSe 2017

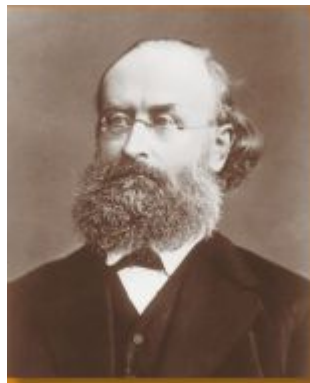


Abbildung 1: Gustav Robert Kirchhoff



Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
74239 Hardthausen
Langer Grund
Wolfgang.Stuchlik@dlr.de

1 Vorwort

Zu einem Aufsatz über die angewandten mathematischen Methoden in der Elektrotechnik, wurde ich kurz nach meinem Studienabschluss vor über 30 Jahren inspiriert. Als Jungingenieur begann ich meine Tätigkeit fast ungewollt im Bereich der rechnergesteuerten Fernsehmesstechnik. Mit den Jahren fand ich immer mehr ehrliches Interesse an diesem Fachgebiet. In einem kollegialen Gespräch mit einem erfahrenen Kollegen fiel die Bemerkung: „... um die Funktionsweise eines einfachen Kondensators wirklich zu verstehen, muss schon eine gehörige Portion des physikalischen Verständnisses vorliegen und man sollte über ein solides mathematisches Handwerk verfügen ...“. Dieser Satz ließ mich erst einmal schmunzeln und ich fing an, fast als Selbstbestätigung meines Studienwissens, skizzenhaft alles mathematisch Nennenswerte über dieses Bauelement zusammenzutragen. Das Kapitel über die Schaltvorgänge am Kondensator des Aufsatzes [Lit.-Ref.: 7] liegt Ihnen hiermit vor.

Sie werden feststellen, dass bereits nach kurzer Zeit mit Vektoren, komplexen Zahlen, Logarithmen, Differentialgleichungen und der Laplace-Transformation gerechnet werden muss. Schon die Vielzahl der Übungsaufgaben verschiedener Fachbuchautoren (siehe Literaturverzeichnis) und deren verschiedenartigsten Lösungswege, waren und sind immer eine echte Bereicherung für mein geistiges Training. Natürlich ist auch die Induktivität gleichberechtigt gegenüber der Kapazität, da die mathematischen Methoden universell einsetzbar sind. Auch im Bereich des Maschinenbaus, mit den Bauelementen „Reibung“, Feder, Masse und Dämpfungstopf, können diese Methoden uneingeschränkt verwendet werden.

An dieser Stelle ein herzliches Dankeschön an Herrn Dieter Marquardt, der mich in jungen Jahren herrlich motivieren konnte. Ich wünsche allen Absolventen, dass sie mindestens einen solchen Menschen in der Praxis finden, der Ihnen täglich die Freude an der TECHNIK und am Beruf des Ingenieurs vermitteln kann.

Seien Sie sich Ihres Wissens bewusst, erweitern Sie es stets und pflegen Sie es Ihr Leben lang!

Die Literaturreferenzen bzw. die Literaturempfehlungen erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Wegen der, über die Jahre hinweg, unübersichtlichen Vielzahl der Veröffentlichungen, Diskussionen, VDI Seminare und Vorträge zu den Themen der Elektrotechnik, habe ich mich für eine allgemeine Literaturempfehlung entschieden.

Sollte eine wesentliche Veröffentlichung, zitiert oder nur erwähnt, nicht aufgeführt sein, so bitte ich hiermit um kollegiale Nachsicht. Bitte informieren Sie mich entsprechend, damit die Liste vervollständigt werden kann.

„Zähmen sollen sich die Menschen, die sich gedankenlos der Wunder der Wissenschaft und Technik bedienen und nicht mehr davon geistig erfasst haben als die Kuh von der Botanik der Pflanzen, die sie mit Wohlbehagen frisst.“

Albert Einstein (1879-1955)

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	2
2	Die Differenzialgleichungen	5
3	Die Zeitkonstante τ	5
4	Schaltvorgänge - von 0V auf U_{max}	7
4.1	Schaltvorgang am Kondensator	7
4.2	Schaltvorgang an einer Spule	8
4.2.1	primärer Ansatz - Bestimmung der Spannungsfunktion	8
4.2.2	sekundärer Ansatz - Bestimmung der Stromfunktion über die Maschengleichung	9
5	Schaltvorgänge - von U_{max} bzw. I_{max} auf 0V	12
5.1	Schaltvorgang am Kondensator	12
5.2	Energiespeicherung im Kondensator	13
5.3	Schaltvorgang an einer Spule	14
6	Schaltvorgang mit Sinusspannung	16
6.1	Der klassische Weg	16
6.2	Lösung von Differentialgleichungen mittels Laplace Transformation	19
6.3	Die Lösung des Laplace-Integrals	22
7	Gustav Robert Kirchhoff	24
7.1	Lebenslauf	24
7.2	Die Kirchhoffschen Regeln	24
7.2.1	Der 1. Kirchhoffsche Satz	24
7.2.2	Der 2. Kirchhoffsche Satz	25
7.3	Der Schwarze Strahler	26
8	Anhang: Laplace-Korrespondenztabelle	27
9	Abkürzungsverzeichnis	31

Abbildungsverzeichnis

1	Gustav Robert Kirchhoff	1
2	Funktionsverläufe erster und zweiter Ordnung	5
3	elektrischer Schwingkreis	6
4	Masse-Feder-Dämpfungstopf-System	6
5	Der Einfluss der Größe τ auf den Funktionsverlauf	6
6	Der Ladevorgang am Kondensator	7
7	normierte Spannungs- und Stromverläufe am Kondensator	7
8	Der Einschaltvorgang an der Spule	8
9	normierte Spannungs- und Stromverläufe an der Spule	9
10	Anwendungsfall für einen Schaltvorgang an einer Spule \Rightarrow Aufbau eines Relais, mit galvanisch getrenntem Steuer- und Arbeitskreis	11
11	Der Schalter wurde geschlossen. Ein Strom induziert in der Spule ein Magnetfeld.	11
12	Spannungs- und Stromverlauf bei der Entladung; die Spannung hat den Maximalwert E , der Strom den Maximalwert $\frac{E}{R}$	13
13	Energiesparlampe für 230V und 50Hz	14
14	CPU Lüfter	14
15	Strom- und Spannungsverlauf beim Abbau des magnetischen Feldes	15
16	Spannungsverlauf beim Schaltvorgang mit Sinusfunktion	18
17	Spannungsverlauf mit geringem Einfluss des flüchtigen Terms	19
18	Stromverlauf mit starkem e-Funktionseinfluss	19
19	Spannungsverlauf beim Schaltvorgang mit Sinusfunktion und Nullphasenwinkel $\varphi = 0$ - Lösung mittels Laplace Transformation	20
20	Spannungsverlauf beim Schaltvorgang mit Sinusfunktion und Nullphasenwinkel $\varphi = 90^\circ$ - Lösung mittels Laplace Transformation	21
21	Gustav Robert Kirchhoff	24
22	Die Maschengleichung für eine Masche	25
23	Die Maschengleichungen für zwei Maschen	25

2 Die Differenzialgleichungen

Für die Strom-Spannungsbeziehungen, an den elektrischen Bauelementen mit Speichervermögen, gelten folgende elementare Differenzialgleichungen:

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

Nach $u_C(t)$ umgestellt:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Nach $i(t)$ umgestellt:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt$$

3 Die Zeitkonstante tau

Die Zeitkonstante gibt allgemein den Zeitraum an, den ein exponentiell absinkender Prozess benötigt, um auf $1/e$ (etwa 36,8 %) seines Ausgangswertes abzusinken. Ein exponentiell ansteigender Prozess wächst in diesem Zeitraum auf 63,2 % des Endwertes. Diese Zeit ist nicht mit der Halbwertszeit zu verwechseln, die den Zeitraum für ein Absinken auf 50 % bezeichnet und 69,3 % der Zeitkonstante entspricht. Beispiele für exponentiell ablaufende Prozesse sind der Abbau eines Schadstoffes in Wasser, die Abkühlung eines Warmwasserspeichers, der radioaktive Zerfall und in elektrischen Stromkreisen die Aufladung von Kondensatoren über einen Widerstand. Die Einheit der Zeitkonstante ist die Sekunde.

Für ein elektrisches System gilt:

$$\tau = R \cdot C$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Die Zeitkonstante τ ist das Produkt oder der Quotient aus dem Bauelement mit Speicherfähigkeit (L und/oder C) und dem Bauelement ohne Speicherfähigkeit (**R!**). Analog gilt es auch für nicht-elektrische Systeme, wie Masse-Feder bzw. Dämpfungstopf-Feder Konstruktionen. Entscheidend ist dabei, dass nur ein Energiespeicher vorhanden ist. Systeme mit zwei Energiespeichern besitzen einen Funktionsverlauf mit Wendepunkt.

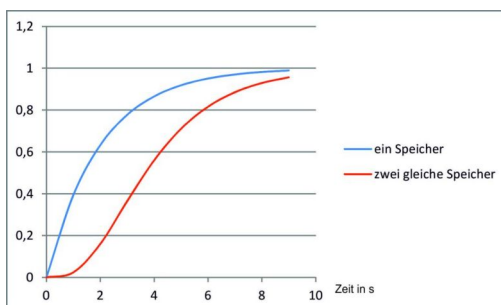


Abbildung 2: Funktionsverläufe erster und zweiter Ordnung

Systeme mit zwei Energiespeichern müssen noch detaillierter betrachtet werden. Es ist ein Unterschied, ob zwei gleiche Energiespeicher oder ob zwei unterschiedliche Energiespeicher vorhanden sind. Zwei unterschiedliche Energiespeicher bilden immer ein schwingfähiges System. Die resultierende Resonanzfrequenz f_0 wird, für ein elektrisches System mit idealen Bauelementen, mit der Thomsonschen Schwingungsgleichung beschrieben:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}}$$

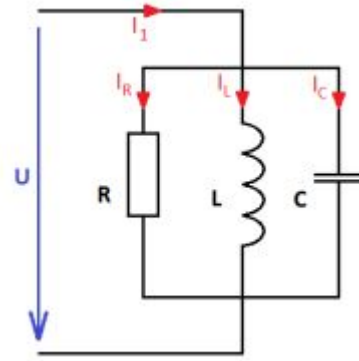


Abbildung 3: elektrischer Schwingkreis

Für ein mechanisches System mit einer Masse „ m “ und einer Nachgiebigkeit „ $N = \frac{1}{c}$ “ einer Feder gilt analog:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{m \cdot N}}$$

$$f_0 = \frac{\sqrt{c}}{2 \cdot \pi \sqrt{m}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

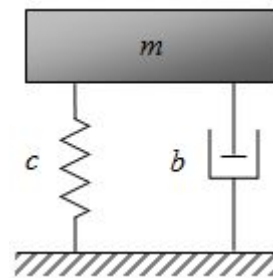
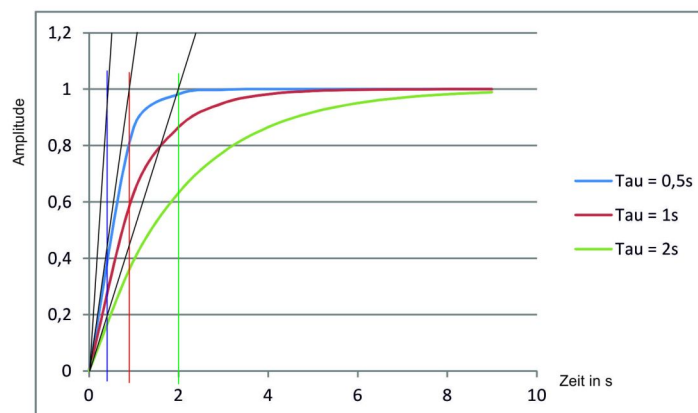


Abbildung 4: Masse-Feder-Dämpfungstopf-System

Für eine steigende Funktion ist die Größe $\tau = 1s$, wenn die Amplitude auf 63 % angestiegen ist. Grafisch lässt es sich über das Anlegen der Tangente im Punkt des höchsten Anstiegs bestimmen. Der Schnittpunkt der Tangente mit der 100 % Niveaulinie, mit anschließendem Fällen des Lotes, bestimmt den Zeitpunkt auf der Abszisse.

Abbildung 5: Der Einfluss der Größe τ auf den Funktionsverlauf

In der Praxis gilt die Regel, dass nach einer Zeit von $t \geq 4,5\tau$ der Vorgang als abgeschlossen gilt. In der Messtechnik kann dadurch, bei höheren Genauigkeitsansprüchen, ein nicht akzeptabler Messfehler entstehen. Hier muss eine längere Wartezeit eingeplant werden, was gerade bei Temperaturmessungen oft notwendig ist.

4 Schaltvorgänge - von 0V auf U_{max}

4.1 Schaltvorgang am Kondensator

Maschengleichung: $E = U_R(t) + U_C(t)$

Die maximale Spannung, die über den Kondensator abfallen kann, ist $U_{max} = E$.

$$i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$$

$$E = R \cdot C \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$E = \tau \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$E - U_C = \tau \frac{dU_C}{dt}$$

$$\frac{dt}{\tau} = \frac{dU_C}{E - U_C}$$

$$\int \frac{dt}{\tau} = \int \frac{1}{E - U_C} dU_C$$

$$\frac{t}{\tau} + C_1 = -\ln[E - U_C] + C_2$$

$$C = C_2 - C_1$$

$$\frac{t}{\tau} = -\ln[E - U_C] + C$$

$$C = \frac{t}{\tau} + \ln[E - U_C]$$

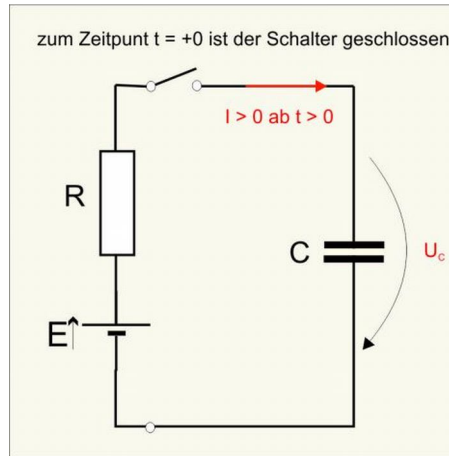


Abbildung 6: Der Ladevorgang am Kondensator

Anfangsbedingung: Der Kondensator hatte zum Zeitpunkt $t=0$ keine Ladung, d.h. $Q = 0$.

$$C \cdot U = Q \quad \Rightarrow \quad U = 0, \text{ da } C > 0.$$

$$C = \frac{0}{\tau} + \ln[E - 0] = \ln(E)$$

$$\frac{t}{\tau} = -\ln[E - U_C] + \ln(E)$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left[\frac{E - U_C}{E}\right]$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left[1 - \frac{U_C}{E}\right]$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{U_C}{E}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 = -\frac{U_C}{E}$$

$$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_C}{E}$$

$$U_C = E[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

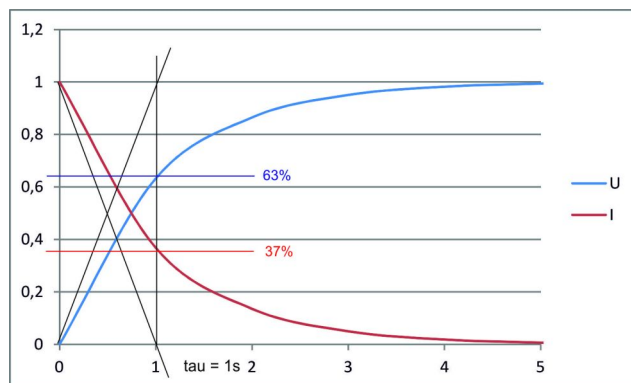


Abbildung 7: normierte Spannungs- und Stromverläufe am Kondensator

Für den Verlauf des Stroms gilt:

$$i(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt}[E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})] = C \cdot \frac{d}{dt}[E - Ee^{-\frac{t}{\tau}}] = C \cdot \frac{d}{dt}E - C \cdot \frac{d}{dt}Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = -C \cdot \frac{d}{dt}Ee^{-\frac{t}{\tau}} = -EC \cdot \frac{d}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$

$$dt = -\tau \cdot du$$

$$i(t) = -EC \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{e^u}{du} = +\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{E}{R} = I_{max}$$

$$i(t) = I_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

4.2 Schaltvorgang an einer Spule

Analog zu den Betrachtungen am Kondensator, werden die Spannungs- und Stromverläufe an der Spule entwickelt.

4.2.1 primärer Ansatz - Bestimmung der Spannungsfunktion

Maschengleichung: $E = U_R(t) + U_L(t)$

Die maximale Spannung, die über der Spule abfallen kann, ist $U_{max} = E$.

$$i(t) = \frac{1}{L} \int U_L dt$$

$$E = i(t) \cdot R + U_L$$

$$E = \frac{R}{L} \int U_L dt + U_L$$

$$\frac{d}{dt} E = \frac{R}{L} U_L + \frac{d}{dt} U_L$$

$$0 = \frac{R}{L} U_L + \frac{d}{dt} U_L$$

$$-\frac{R}{L} U_L = \frac{d}{dt} U_L$$

$$-\frac{R}{L} dt = \frac{dU_L}{U_L}$$

$$\int -\frac{R}{L} dt = \int \frac{dU_L}{U_L}$$

$$-\frac{R}{L} t + C_1 = \ln(U_L) + C_2$$

$$C = C_2 - C_1$$

$$-\frac{R}{L} t = \ln(U_L) + C$$

Für $\tau = \frac{L}{R}$ und $U_L = E$ bei $t=0$ gilt:

$$C = -\frac{t}{\tau} - \ln(E)$$

$$C = -\ln(E)$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(U_L) - \ln(E)$$

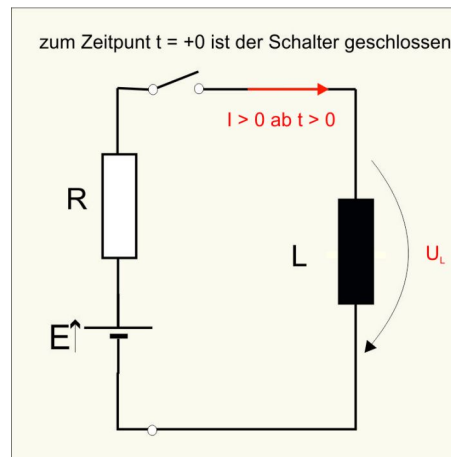


Abbildung 8: Der Einschaltvorgang an der Spule

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left[\frac{U_L}{E}\right]$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_L}{E}$$

$$U_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Für den Verlauf des Stromes gilt:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int U_L dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$i(t) = \frac{E}{L} \int e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$u = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$

$$dt = -\tau du$$

$$i(t) = \frac{E}{L} \int e^u \cdot (-\tau) du$$

$$i(t) = -\frac{E \cdot \tau}{L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + C$$

$$i(t) = -\frac{E \cdot L}{R \cdot L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + C$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + C$$

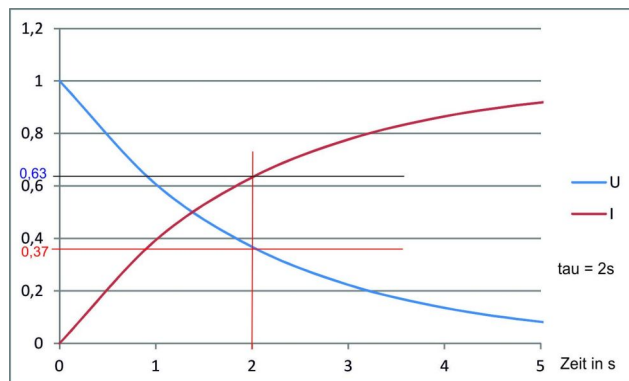


Abbildung 9: normierte Spannungs- und Stromverläufe an der Spule

Anfangsbedingung bei $t = 0$; $I = I_{max} = \frac{E}{R} \Rightarrow C = \frac{E}{R}$

Die resultierende Anfangskonstante für den Zeitpunkt $t = 0$ ist physikalisch schwer vermittelbar. Wir haben einen Strom $I = \frac{E}{R}$, der im Zeitpunkt null zur Verfügung steht, jedoch ist der fließende Strom $i(t=0) = 0$. Die Ursache liegt in der Lenz'schen Regel, die besagt, dass die Wirkung der Ursache entgegen wirkt. Aus diesem Grund wird der sekundäre Ansatz herangezogen, der für das Verständnis besser geeignet ist. Grundsätzlich ist jedoch zu bemerken, dass alle Anfangsbedingungen messtechnisch ermittelt werden können, bzw. über die Messtechnik kann die Theorie bestätigt werden.

$$i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

4.2.2 sekundärer Ansatz - Bestimmung der Stromfunktion über die Maschengleichung

$$E = i(t)R + U_L$$

$$E = i(t)R + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{E}{R} = i(t) + \frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$\frac{E}{R} = I_{max}$$

$$I_{max} - i(t) = \tau \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{dt}{\tau} = \frac{di}{I_{max} - i(t)}$$

$$\int \frac{dt}{\tau} = \int \frac{di}{I_{max} - i(t)}$$

$$\frac{t}{\tau} + C_1 = -\ln[I_{max} - i(t)] + C_2$$

$$C = C_2 - C_1$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln[I_{max} - i(t)] - C$$

$$C = \frac{t(0)}{\tau} + \ln[I_{max} - i(0)]$$

Der Stromwert im Zeitpunkt $t=0$ kann messtechnisch bestimmt und somit gedanklich nachvollzogen werden.

$$C = \ln[I_{max}]$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln[I_{max} - i(t)] - \ln[I_{max}]$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left[\frac{I_{max} - i(t)}{I_{max}}\right]$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left[1 - \frac{i(t)}{I_{max}}\right]$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{i(t)}{I_{max}}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 = -\frac{i(t)}{I_{max}}$$

$$i(t) = I_{max}[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} I_{max} [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

$$u(t) = L \frac{d}{dt} [I_{max} - I_{max} e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für den Spannungsverlauf:

$$u(t) = -L \frac{d}{dt} I_{max} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t) = -L \cdot I_{max} \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t) = \frac{L}{R} I_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t) = R \cdot I_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$R \cdot I_{max} = U_{max} = E$$

$$u(t) = U_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

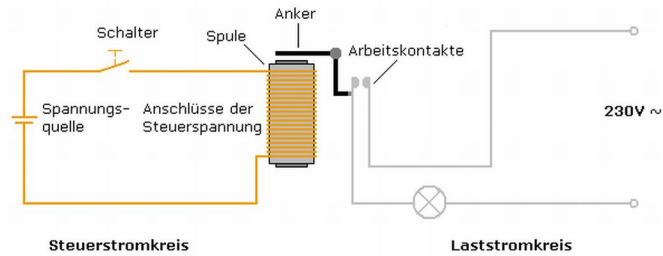


Abbildung 10: Anwendungsfall für einen Schaltvorgang an einer Spule \Rightarrow Aufbau eines Relais, mit galvanisch getrenntem Steuer- und Arbeitskreis

Die Besonderheit von Relaisschaltungen besteht in der Möglichkeit eine hohe Spannung mittels einer für den Menschen ungefährlichen niedrigen Spannung zu schalten. Im Steuerkreis verfügen wir über eine Speisenspannung von 12V oder 24V. Wird der Schalter geschlossen, so fließt ein Strom, der in der Spule über den magnetischen Fluss Φ ein Magnetfeld \mathbf{B} induziert. Die Kraft des Magnetfelds zieht den beweglich montierten Anker an. Der Anker bewegt über eine Wippenfunktion den Arbeitskontakt. Ist der Arbeitskontakt geschlossen, so kann ein Strom fließen. Im Arbeitskreis wird eine große elektrische Leistung umgesetzt, da das Produkt aus Spannung und Strom sehr hoch ist. Der hohe Strom fließt nicht über den Bedienschalter und kann damit dem Menschen nicht gefährlich werden.

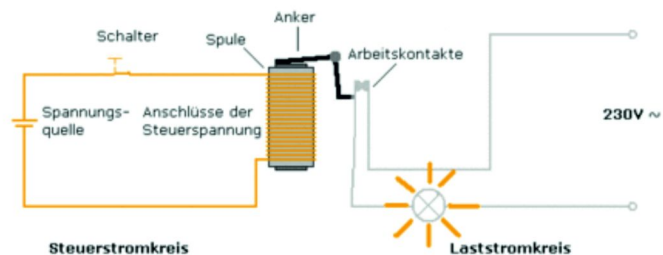


Abbildung 11: Der Schalter wurde geschlossen. Ein Strom induziert in der Spule ein Magnetfeld.

Nachteile von Relaisschaltungen, gegenüber Schalttransistoren

- hohe Ansprech- und Abfallzeit (Millisekunden gegenüber Mikro- und Nanosekunden)
- erschütterungs- und stoßempfindlich; bedingt einsetzbar für mobile Systeme
- elektrischer und mechanischer Verschleiß - daraus folgt eine limitierte Lebenszeit
- je nach Kontaktwerkstoff kann sich der Kontaktübergangswiderstand mit der Lebensdauer, abhängig von der geschalteten Last, ändern
- Geräuschentwicklung beim Schalten
- Kontaktwerkstoffe müssen oft vor der Luft geschützt werden, hermetische Isolierung der Kontakte ist notwendig

5 Schaltvorgänge - von U_{max} bzw. I_{max} auf 0V

5.1 Schaltvorgang am Kondensator

Dieser Vorgang wird auch als Entladung eines Kondensators über einen Widerstand bezeichnet. Die Spannung, die maximal über dem Kondensator abfällt, ist $U_{max} = E$. Die Polarität des aufgeladenen Kondensators ist zu beachten, da sich daraus die Richtung des Stromflusses ergibt.

Maschengleichung: $0 = U_R(t) + U_C(t)$

$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt}$$

$$0 = R \cdot C \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$-R \cdot C \frac{dU_C}{dt} = U_C$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$-\tau \frac{dU_C}{dt} = U_C$$

$$\frac{dU_C}{U_C} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int \frac{dU_C}{U_C} = \int -\frac{dt}{\tau}$$

$$\ln(U_C) + C_1 = -\frac{t}{\tau} + C_2$$

$$C = C_1 - C_2$$

$$\ln(U_C) + C = -\frac{t}{\tau}$$

$$C = -\frac{t}{\tau} - \ln[U_C(0)]$$

Für den Zeitpunkt t = 0 gilt:

$$C = -\frac{0}{\tau} - \ln(E)$$

$$\ln(U_C) - \ln(E) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln\left(\frac{U_C}{E}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{U_C}{E} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Für das Verhalten des Stromes gilt:

$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt}$$

$$i(t) = E \cdot C \frac{d}{dt} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$

$$dt = -\tau du$$

$$i(t) = E \cdot C \frac{e^u}{-\tau du}$$

$$i(t) = -\frac{E \cdot C}{R \cdot C} \frac{e^u}{du}$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = -I_{max} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

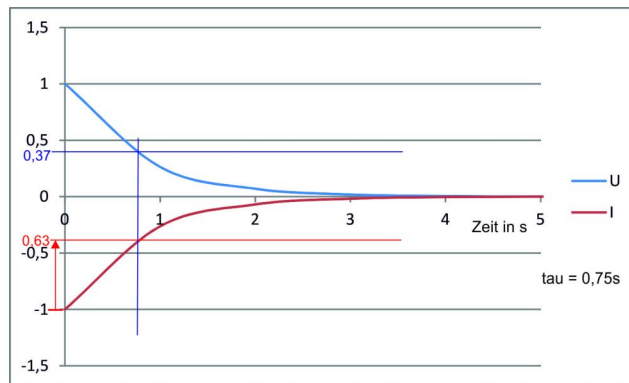


Abbildung 12: Spannungs- und Stromverlauf bei der Entladung; die Spannung hat den Maximalwert E, der Strom den Maximalwert $\frac{E}{R}$

5.2 Energiespeicherung im Kondensator

Welche maximale elektrische Energie kann ein Kondensator speichern?

$$W = P \cdot t$$

$$W = U(t) \cdot I(t) \cdot t$$

Exemplarisch wurde ein Kondensator mit einer Kapazität von $C = 1\text{F}$ auf $E = 1000\text{V}$ aufgeladen. Wie groß ist die elektrische Leistung, die vom Kondensator in einer Stunde bereitgestellt werden kann? Zum Zeitpunkt $t=0$ steht die Energie von $E^2 \cdot C$ zur Verfügung.

$$W(t) = U(t) \cdot \frac{U(t)}{R}$$

$$U_{max} = E$$

$$W(t) = \frac{1}{R} \int [E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}]^2 dt$$

$$W(t) = \frac{E^2}{R} \int e^{-2\frac{t}{\tau}} dt$$

Durch Substitution nach Lit.: [6] gilt:

$$u = -2\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2}{\tau}$$

$$dt = -\frac{\tau}{2} du$$

$$W(t) = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^u \left[-\frac{\tau}{2}\right] du$$

$$W(t) = -\frac{E^2 \tau}{2R} \cdot [e^{-2\frac{t}{\tau}}]_0^\infty$$

$$W(t) = -\frac{E^2\tau}{2R} \left[e^{-2\frac{\infty}{\tau}} - e^{-2\frac{0}{\tau}} \right]$$

$$W(t) = -\frac{E^2\tau}{2R} [0 - 1]$$

$$W(t) = \frac{E^2C}{2}$$

$$W(t) = \frac{10^6 V^2}{2} \cdot 1 \frac{As}{V} = 50kWs$$

Umrechnung auf eine Stunde: 1h = 3600s

$$P = \frac{W}{t} = \frac{50kWs}{3600s} = 13,89W$$

Bauelemente, die 14Watt Leistung umsetzen:



Abbildung 13: Energiesparlampe für 230V und 50Hz



Abbildung 14: CPU Lüfter

5.3 Schaltvorgang an einer Spule

Zum Zeitpunkt $t=0$ ist in der Spule ein Magnetfeld aufgebaut. Beim Schließen des Schalters induziert das Magnetfeld einen Strom. Zum Zeitpunkt $t=0$ fließt der maximal mögliche Strom I_{max} über den Widerstand R . Mit abbauendem Magnetfeld sinkt der Strom. Mit sinkendem Strom wird der Spannungsabfall geringer und letztendlich konvergieren Strom und Spannung gegen null.

Maschengleichung: $0 = i(t) \cdot R + U_L$

$$0 = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$-L \cdot \frac{di}{dt} = i(t) \cdot R$$

$$-\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} = i(t)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$-\tau \cdot \frac{di}{dt} = i(t)$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\int \frac{di}{i} = - \int \frac{1}{\tau} dt$$

$$\ln(i) + C_1 = -\frac{t}{\tau} + C_2$$

$$C = C_1 - C_2$$

$$\ln(i) + C = -\frac{t}{\tau}$$

$$C = -\frac{t}{\tau} - \ln(i) \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{0}{\tau} - \ln(I_{max})$$

$$\ln(i) - \ln(I_{max}) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln\left[\frac{i}{I_{max}}\right] = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{i}{I_{max}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = I_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Für den Spannungsverlauf gilt:

$$U_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$U_L = L \cdot \frac{d}{dt} I_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_L = L \cdot I_{max} \frac{d}{dt} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Substitution: $u = -\frac{t}{\tau}$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$

$$dt = -\tau du$$

$$U_L = L \cdot I_{max} \left[-\frac{1}{\tau}\right] \frac{d}{du} e^u$$

$$U_L(t) = -I_{max} \cdot \frac{L}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_L(t) = -I_{max} \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_L(t) = -U_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

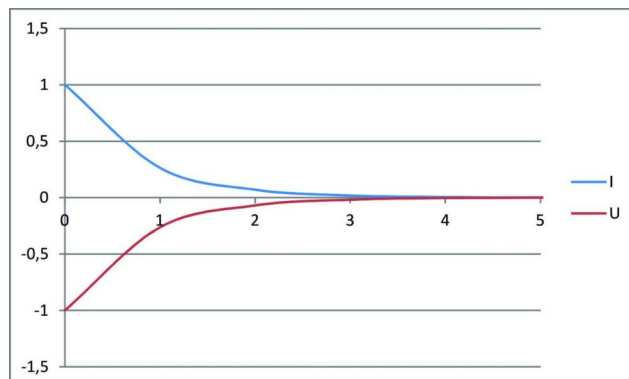


Abbildung 15: Strom- und Spannungsverlauf beim Abbau des magnetischen Feldes

6 Schaltvorgang mit Sinusspannung

6.1 Der klassische Weg

Anstelle einer Sprungfunktion wird ein RC-Glied mit einer Sinusspannung angesteuert. Untersucht werden der transiente Bereich (oft auch als flüchtiger Bereich bezeichnet) nach dem Schaltvorgang und der statische Bereich nach einer Zeit von $t > 5 \cdot \tau$. Für die Spannungsfunktion gilt folgender Ausdruck:

$$u(t) = U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ω ist die Kreisfrequenz: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

φ ist der Nullphasenwinkel

Die Maschengleichung lautet: $U \sin(\omega t + \varphi) = i(t) \cdot R + u_c(t)$

Für den Strom durch den Kondensator gilt: $i(t) = C \frac{u_c(t)}{dt}$

Für einen allgemeinen Vierpol mit virtuellen Eingangs- und Ausgangsgrößen gilt:

$$x_e(t) = \tau \cdot \frac{dx_a(t)}{dt} + x_a(t)$$

$$u_C(t) \equiv x_a(t)$$

$$U \cdot \sin(\omega t + \varphi) \equiv x_e(t)$$

Die inhomogene Differentialgleichung lautet: $U \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \tau \cdot \frac{dx_a(t)}{dt} + x_a(t)$

Die homogene Differentialgleichung lautet: $0 = \tau \cdot \frac{dx_a(t)}{dt} + x_a(t)$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet: $x_a(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Diese Lösung wird auch als das „**flüchtige Glied**“ $h_f(t)$ im noch zu ermittelnden Gesamtausdruck $h(t)$ bezeichnet, da es vom Zeitpunkt $t=0$ bis zum eingeschwungenen Zustand das Gesamtverhalten stark bestimmt. Nach einer „gewissen“ Zeit verflüchtigt sich der Einfluss.

Bestimmung des stationären Zustandes:

$$\frac{x_{stat}(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\frac{x_{stat}(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{\frac{1+j\omega RC}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$\frac{x_{stat}(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \frac{1-j\omega RC}{1-j\omega RC}$$

$$\frac{x_{stat}(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{1}{1+(\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$$

$$\frac{x_{stat}(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \sqrt{\left[\frac{1}{1+(\omega RC)^2}\right]^2 + \left[\frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\right]^2}$$

$$\frac{x_{stat}(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

$$x_{stat}(j\omega) = x_e(j\omega) \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} e^{j(\varphi_{x_a} - \varphi_{x_e})}$$

Zur Bestimmung des Phasenwinkels φ gilt allgemein: $\varphi = \arctan(\frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}})$

In der Eulerschen Schreibweise wird ein komplexer Ausdruck als Betrag und Phasenwinkel dargestellt, allgemein gilt: $Z = |Z| \cdot e^{j\varphi}$

Werden zwei Ausdrücke dividiert, also ins Verhältnis gesetzt, so dividieren sich die Beträge und die Einzelphasenwinkel bilden eine Differenz.

Die Größe φ_{x_e} entspricht dem Nullphasenwinkel des Eingangssignals x_e .

Die Größe φ_{x_a} entspricht dem Nullphasenwinkel des Ausgangssignals x_a .

$$x_{stat}(t) = x_e(t) \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{x_a} - \varphi_{x_e})$$

Überlagerung der Ergebnisse und die daraus resultierende Funktion:

$$h(t) = h_f(t) + h_{stat}(t)$$

$$u_a(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{u_e(t)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u_a} - \varphi_{u_e})$$

Bestimmung der Integrationskonstanten k:

$$u_a(0) = k \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + \frac{u_e(0)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot \sin(\omega 0 + \varphi_{u_a} - \varphi_{u_e})$$

$$u_a(0) = k + \frac{u_e(0)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot \sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e})$$

$$k = -\frac{u_e(0)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot \sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e})$$

Für die Ausgangsspannung $u_a(t)$ - bzw. der Spannung $[u_C(t)]$ die über dem Kondensator abfällt, gilt:

$$u_a(t) = \frac{u_e(t)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot [\sin(\omega t + \varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) - \sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

Bestimmung der Stromfunktion:

$$i(t) = C \cdot \frac{dx_a}{dt}$$

$$i(t) = \frac{\omega \cdot C \cdot x_e(t)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot [\cos(\omega t + \varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) + \frac{1}{\omega \cdot \tau} \sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

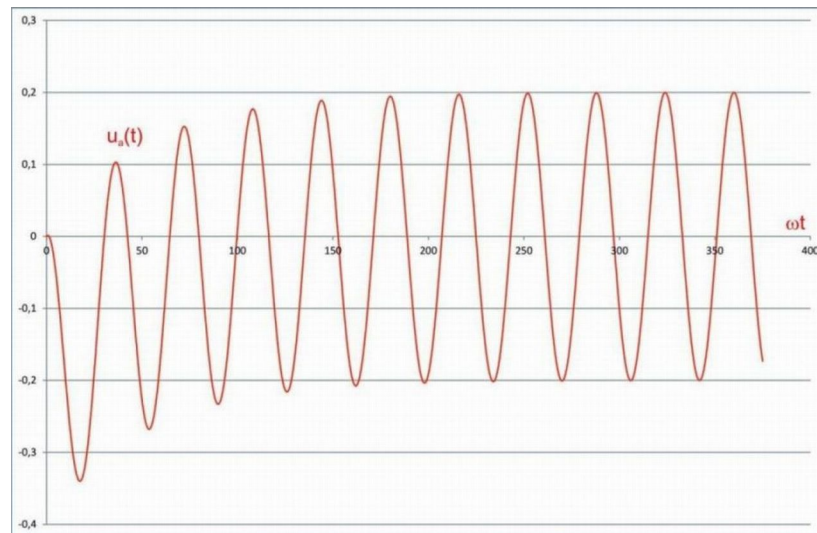


Abbildung 16: Spannungsverlauf beim Schaltvorgang mit Sinusfunktion

Zur Diskussion der Spannungs- und Stromverläufe

$$u_a(t) = \frac{u_e(t)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot [\sin(\omega t + \varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) - \sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

$$i(t) = \frac{\omega \cdot C \cdot u_e(t)}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cdot [\cos(\omega t + \varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) + \frac{1}{\omega \cdot \tau} \sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

Randbedingungen, damit die Interpretation beider Funktionen transparenter wird:

- Die Kreisfrequenz ω wird normiert und der Wert $\omega = 1\text{s}^{-1}$ wird angenommen.
- Der Widerstand R wird normiert und der Wert $R = 1\Omega$ wird angenommen.
- Die Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$. Für den Wert C wird der Wert $1\mu\text{F}$ angenommen. Damit ist $\tau = 10^{-6}\text{s}$.

Fazit:

- Das Verhältnis von $\frac{u_a(t)}{i(t)} = \frac{1}{\omega C} = 10^6 \frac{\text{V}}{\text{A}}$.
- Zwischen den Größen $u_a(t)$ und $i(t)$ besteht eine Phasenverschiebung von 90° . Der Strom eilt der Spannung um 90° voraus.
- Der Term „ $-\sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ “ weist bei der $u_a(t)$ -Funktion auf eine steigende e-Funktion-Wirkung. Diese Wirkung ist flüchtig und nur direkt nach dem Schaltvorgang feststellbar.
- Der Term „ $+\frac{1}{\omega \cdot \tau} \sin(\varphi_{u_a} - \varphi_{u_e}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ “ weist bei der $i(t)$ -Funktion auf eine fallende e-Funktion-Wirkung (flüchtige Wirkung).
- Je größer die Zeitkonstante τ gewählt wird, desto geringer ist die Wirkung des „flüchtigen Terms“ bei der Funktion $i(t)$.
- Wird die Zeitkonstante τ exemplarisch mit 1s gewählt, so sind die wirkenden flüchtigen Anteile für die Spannungs- und Stromfunktion gleich. Die Wirkung ist jedoch nur in den ersten Sekunden des Schaltvorgangs von Bedeutung.

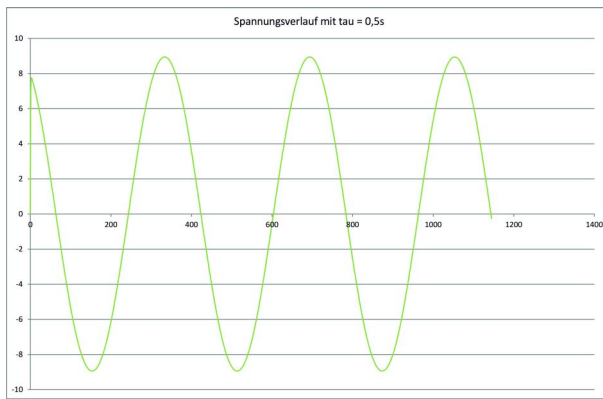


Abbildung 17: Spannungsverlauf mit geringem Einfluss des flüchtigen Terms

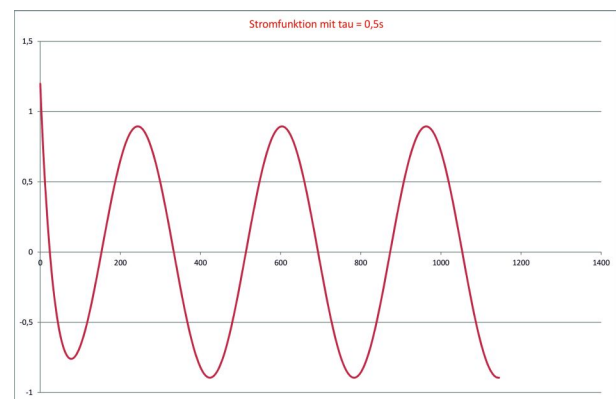


Abbildung 18: Stromverlauf mit starkem e-Funktionseinfluss

6.2 Lösung von Differentialgleichungen mittels Laplace Transformation

Die Lösungen von homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen sind oft schreib- und zeitaufwendig. Die Alternative ist die Laplace-Transformation. Es geht in diesem Kapitel nicht darum im Detail das Verfahren zu erklären, sondern es soll gezeigt werden, wie einfach und transparent diese Lösungswege sind. Die einzige Hürde ist die Rücktransformation vom Laplace Bereich (Bildbereich) in den Zeit-Bereich. Der Anwender muss eine passende mathematische Form finden, um aus der Korrespondenztabelle die passende Lösung im Zeitbereich benutzen zu können. Am Beispiel des Ladevorgangs am Kondensator, mit der Eingangsfunktion $u(t) = U \cdot \sin(\omega t)$, wird die zweite Lösungsmethode vorgestellt. Der Nullphasenwinkel der Eingangsfunktion wird mit null angenommen.

Der Laplace-Operator: $s = j\omega$ aber auch gleichwertig: $p = j\omega$

$$\tau = R \cdot C$$

$$x_e(t) = u(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad K \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} \text{ mit } \varphi = 0, K = U \text{ und } \omega = a$$

$$x_a(t) = u_C$$

Die Spannungsteilerregel:

$$\frac{x_a(t)}{x_e(t)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + s\tau}$$

Der Betrag der komplexen Übertragungsfunktion:

$$f(t) = \frac{x_a(t)}{x_e(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

Die Lösung in Laplace-Schreibweise:

$$x_a(s) = \frac{1}{1 + s\tau} \cdot K \cdot \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$K \cdot a = K^*$$

$$x_a(s) = K^* \cdot \frac{1}{1 + s\tau} \cdot \frac{1}{s^2 + a^2}$$

$$x_a(s) = K^* \cdot \frac{1}{\tau(\frac{1}{\tau} + s)} \cdot \frac{1}{s^2 + a^2}$$

$$\frac{K}{\tau} \cdot a = K^{**}$$

Die Rücktransformation (siehe Anhang - Zeile 57):

Bemerkung Der Buchstabe a wurde bereits vor Benutzung der Laplace-Korrespondenztabelle mit ω belegt, d.h. das wir in der Laplace-Korrespondenztabelle die Buchstaben wie folgt benutzen müssen:

- Der Laplaceoperator $s = j\omega$ ist in der verwendeten Laplace-Korrespondenztabelle als $p = j\omega$ angegeben. Beide Bezeichnungen sind gleichberechtigt und legitim.
- Durch die Festlegung mit $\sin(\omega t)$ ist der Buchstabe in der verwendeten Laplace-Korrespondenztabelle als das „b“ zu interpretieren.
- Wenn für $\omega = b$ anstatt des Buchstabens „a“ zu verwenden ist, dann gilt letztendlich $a = \frac{1}{\tau}$

$$\frac{1}{b+s} \cdot \frac{a}{s^2+a^2} \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad \frac{1}{a^2+b^2} [e^{-at} - \cos(bt) + \frac{a}{b} \sin(bt)]$$

Bitte beachten die Buchstaben a, b und p der Laplace-Korrespondenztabelle wurden entsprechend ihrer technischen Bedeutung bereits in diesem Schritt angepasst.

Lösung:

$$x_a(t) = K^{**} \cdot \frac{1}{[\frac{1}{\tau}]^2 + \omega^2} [e^{-\frac{t}{\tau}} - \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega \tau} \sin(\omega t)]$$

$$u_a(t) = \frac{U \cdot \omega}{\tau} \cdot \frac{1}{[\frac{1}{\tau}]^2 + \omega^2} [e^{-\frac{t}{\tau}} - \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega \tau} \sin(\omega t)]$$

$$u_a(t) = \frac{U \cdot \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} [e^{-\frac{t}{\tau}} - \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega \tau} \sin(\omega t)]$$

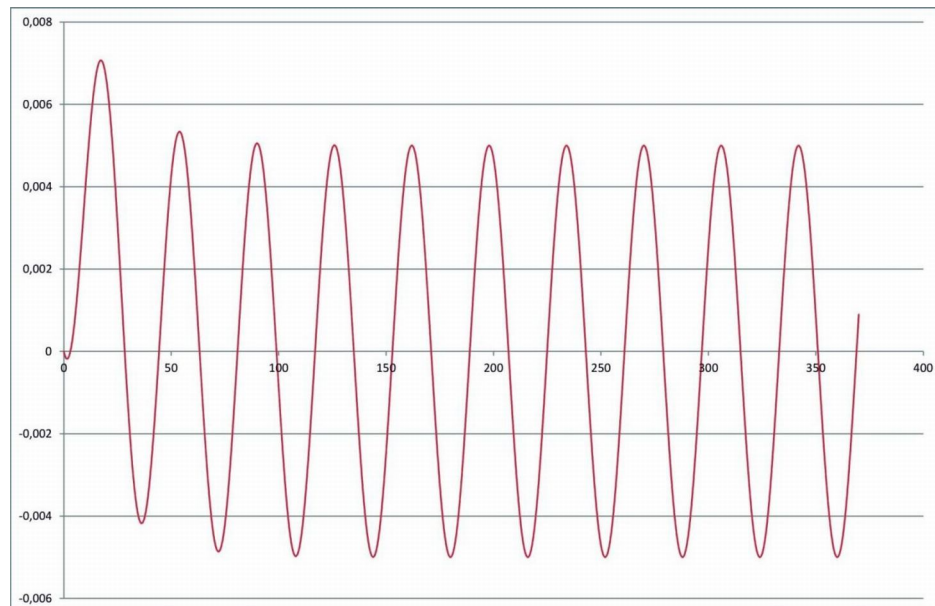


Abbildung 19: Spannungsverlauf beim Schaltvorgang mit Sinusfunktion und Nullphasenwinkel $\varphi = 0$ - Lösung mittels Laplace Transformation

Wie man unschwer erkennt, sind die Lösungen in den Abbildungen 16 und 19 nicht gleich. Die einzige Ursache liegt in dem angenommenen Nullphasenwinkel für die Eingangsfunktion $u(t)$ mit $\varphi = 0$, um in der Laplace-Korrespondenztabelle die Transformationsgleichung (siehe Zeile 18) für die Sinus-Funktion $U \cdot \sin(\omega t)$ $\circ \rightarrow \bullet$ $U \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ direkt verwenden zu können. Exemplarisch wird die Eingangsfunktion $u(t)$ um 90° verschoben. Wir nehmen jetzt die Cosinus-Funktion.

Arbeitsschritte:

- Laplace-Operator: $p = j\omega$
- Transformation der Funktion (siehe Zeile 32): $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$ $\circ \rightarrow \bullet$ $U \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
- Übertragungsfunktion: $\frac{1}{1+p\tau}$
- $u_a(p) = \frac{1}{1+p\tau} \cdot U \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
- $u_a(p) = \frac{U}{\tau} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
- $K = \frac{U}{\tau}$
- Rücktransformation (siehe Zeile 58): $u_a(t) = K \cdot \frac{1}{\tau(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2)} [\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}}]$

Ergebnis:

$$u_a(t) = \frac{U}{1+(\omega\tau)^2} [\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}}]$$

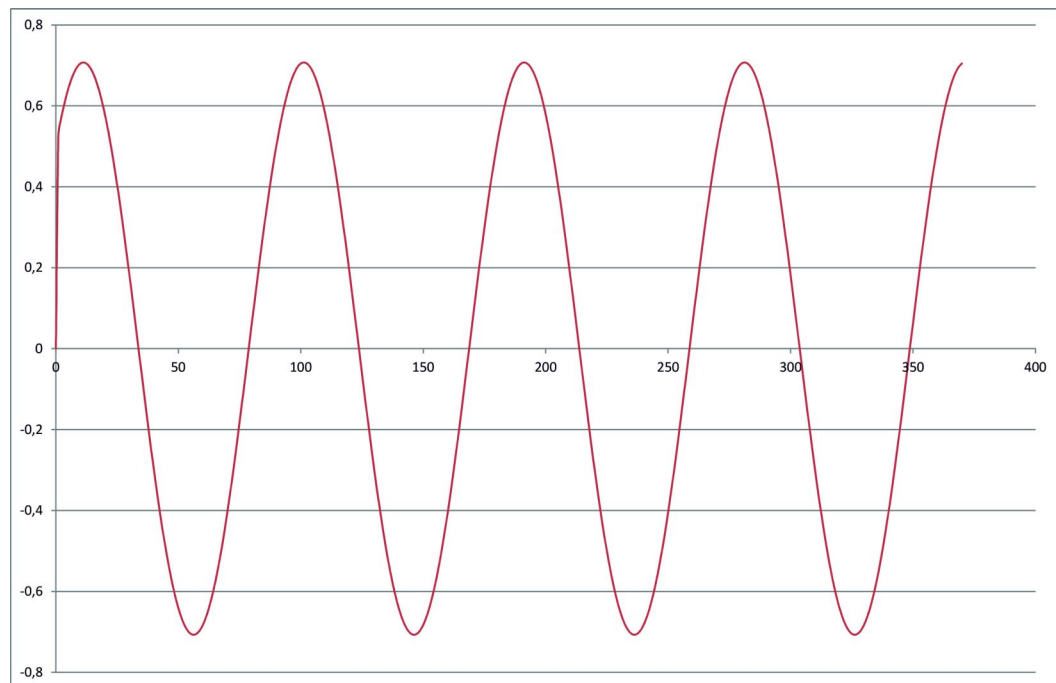


Abbildung 20: Spannungsverlauf beim Schaltvorgang mit Sinusfunktion und Nullphasenwinkel $\varphi = 90^\circ$ - Lösung mittels Laplace Transformation

Zur Abbildung 17 ist dieses Ergebnis bereits ähnlich. Auffallend ist der Phasensprung zur Beginn und der recht geringe Einfluss der e-Funktion (Einfluss des flüchtigen Gliedes). Je größer die Zeitkonstante τ gewählt wird, desto kleiner ist der Einfluss des e-Funktion, desto größer ist der Einfluss der Sinus-Funktion und umso stärker wird die Amplitude gedämpft.

6.3 Die Lösung des Laplace-Integrals

Wie im Kapitel 5.2 gezeigt wurde, ist die Laplace-Transformation ein leistungsstarkes Werkzeug, um Differentialgleichungen zu lösen. Jedoch haben wir auch feststellen müssen, dass nicht alle Funktionen leicht und bequem über die Korrespondenztabelle darstellbar sind. Für die Funktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ sind Lösungen vorhanden, jedoch nicht für die Funktionen $\sin(\omega t + \varphi)$ bzw. $\cos(\omega t + \varphi)$.

Sind die gesuchten Funktionen nicht in der Korrespondenztabelle zu finden, so muss das Laplace-Integral gelöst werden:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Laplace-Operator: $s = j\omega$

$F(s)$ entspricht der Laplace transformierten Funktion $f(t)$

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

Der optimale Ansatz zur Lösung des Integrals, besteht in der Darstellung der Sinusfunktion als e-Funktion. Somit ist die Produktregel bei der Integration leicht anwendbar.

Darstellung des Sinusfunktion $\sin(x)$ über die e-Funktion: $f(x) = \frac{e^{+jx} - e^{-jx}}{2j}$

Darstellung des Sinusfunktion $\sin(\omega t)$ über die e-Funktion: $f(t) = \frac{e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$

Darstellung des Sinusfunktion $\sin(\omega t + \varphi)$ über die e-Funktion: $f(t) = \frac{e^{+j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j}$

Das zu lösende Integral:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\frac{e^{+j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} \right] dt$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-st} [e^{+j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}] dt$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} [e^{-st+j(\omega t + \varphi)} - e^{-st-j(\omega t + \varphi)}] dt$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} [e^{-(s+j\omega)t+j\varphi} - e^{-(s-j\omega)t+j\varphi}] dt$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} [e^{-(s+j\omega)t} \cdot e^{j\varphi} - e^{-(s-j\omega)t} \cdot e^{j\varphi}] dt$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \int_0^{\infty} [e^{-(s+j\omega)t} - e^{-(s-j\omega)t}] dt$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \int_0^{\infty} [e^{-(s+j\omega)t}] dt - \int_0^{\infty} [e^{-(s-j\omega)t}] dt \right\}$$

Substitution mittels „u“ für beide Teilintegrale: $u = -(s + j\omega)t \Rightarrow u = -(s - j\omega)t$

$$\frac{du}{dt} = -(s + j\omega) \Rightarrow \frac{du}{dt} = -(s - j\omega)$$

$$dt = -\frac{du}{(s+j\omega)} \Rightarrow dt = -\frac{du}{(s-j\omega)}$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \int_0^\infty [e^u \cdot (-\frac{1}{(s+j\omega)})] du - \int_0^\infty [e^u (-\frac{1}{(s-j\omega)})] du \right\}$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \int_0^\infty [e^u \frac{1}{(s-j\omega)}] du - \int_0^\infty [e^u \cdot \frac{1}{(s+j\omega)}] du \right\}$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \left[\frac{1}{(s-j\omega)} \right] \cdot e^u - \left[\frac{1}{(s+j\omega)} \right] \cdot e^u \right\} \Big|_0^\infty$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \left[\frac{1}{(s-j\omega)} \right] \cdot e^{(s-j\omega)t} - \left[\frac{1}{(s+j\omega)} \right] \cdot e^{(s+j\omega)t} \right\} \Big|_0^\infty$$

Das Einsetzen von $t = \infty$ ergibt für beide Teilterme null.

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \left[\frac{1}{(s-j\omega)} \right] \cdot e^{(s-j\omega)t} - \left[\frac{1}{(s+j\omega)} \right] \cdot e^{(s+j\omega)t} \right\} \Big|_0^\infty$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \left[\frac{1}{(s-j\omega)} \right] - \left[\frac{1}{(s+j\omega)} \right] \right\}$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \frac{(s+j\omega) - (s-j\omega)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \right\}$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\varphi} \left\{ \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

$$F(s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \cdot e^{j\varphi}$$

Unser Ziel war es, für die Funktion $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ die Laplace transformierte Form zu finden!

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi) \circ \bullet \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \cdot e^{j\varphi}$$

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi) \circ \bullet \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \cdot [\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)]$$

$$u_a(s) = \left[\frac{K}{a+s} \right] \left\{ \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \cdot [\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)] \right\}$$

$$K = \frac{U}{\tau}$$

$$a = \frac{1}{\tau}$$

Welche Schritte sind noch zu tun?

- Die Gleichung im Laplace-Bereich so umformen, dass die Laplace-Korrespondenztabelle benutzt werden kann.
- Rücktransformation der Lösung in den Zeitbereich

7 Gustav Robert Kirchhoff

7.1 Lebenslauf

Geboren am 12. März 1824 in Königsberg (Ostpreußen)

Gestorben am 17. Oktober 1887 in Berlin

Gustav Robert Kirchhoff war ein deutscher Physiker, der sich insbesondere um die Erforschung der Elektrizität verdient gemacht hat. Gustav Robert Kirchhoff studierte von 1842 bis 1847 Mathematik und Physik an der Universität Königsberg. Von 1850 bis 1854 war er an der Universität Breslau tätig, wechselte später an die Universität Heidelberg. Er beeinflusste in Heidelberg Helmholtz und war Lehrer von L. Boltzmann, H. Hertz und Max Planck. Es gibt wohl kein Gebiet der klassischen Physik, zu dem er nicht originelle und fruchtbare Beiträge lieferte. Im Jahre 1875 wurde er als Professor für theoretische Physik an die Universität Berlin berufen. Diese Stelle hatte er bis 1886 inne.

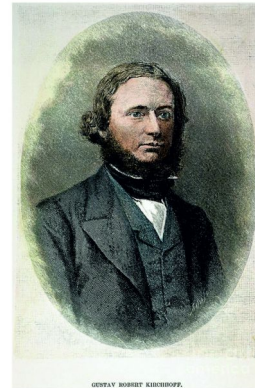


Abbildung 21: Gustav Robert Kirchhoff

Kirchhoffs Erstlingsarbeit, die „Kirchhoffschen Verzweigungssätze“ (Knoten- und Maschengesetz) als Gesetz der Ausbreitung eines elektrischen Stromes in Platten und in zusammengesetzten Leitungssystemen, wurden auch für Wechselstrom erweitert bis zur Kirchhoff-Thomsonschen Schwingungsgleichung.

Kirchhoff wurde für seine formulierten Regeln daraufhin bekannt. Diese Regeln dienen auch jetzt noch bei elektrischen Stromkreisen zur Beschreibung der Abhängigkeit von elektrischer Spannung, elektrischem Strom und dem ohmschen Widerstand. Diese „Kirchhoffsche“ Regeln sind fundamental für das Verständnis, den Aufbau und die Analyse elektrischer Schaltungen sowie der Elektrotechnik allgemein. Kirchhoff hat, zusammen mit Robert Wilhelm Bunsen, mittels Spektralanalyse die chemischen Elemente Caesium und Rubidium entdeckt. Durch ihre Studien wurde es zudem möglich, die „Fraunhoferlinie“ zu erklären und somit eine der wesentlichen Grundlagen der modernen Astronomie zu schaffen.

Das „Kirchhoffsche Strahlungsgesetz“ besagt: Materie gleich welcher Art sendet bei Erhitzung eine kontinuierliche Strahlung aus, die je nach der Temperatur für den Menschen unsichtbar oder sichtbar ist. Diese Strahlung nennt man Temperatur- oder Wärmestrahlung. Eine experimentelle Untersuchung dieses Gesetzes war zu dieser Zeit nicht möglich, da die Mittel für die Messung hoher Temperaturen und kleiner Strahlungsenergie fehlten. Die technische Bedeutung wurde jedoch sofort erkannt. Das daraus entwickelte Konzept des Schwarzen Körpers führte später zur Quantenphysik.

7.2 Die Kirchhoffschen Regeln

7.2.1 Der 1. Kirchhoffsche Satz

Stoßen mehrere Ströme an einem Knotenpunkt aneinander, so ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme an einem folgenden Knotenpunkt (Stromverteilung).

Aus diesem Satz ergeben sich folgende Eigenschaften:

- Ein elektrisches Potenzialgefälle ist die Voraussetzung für einen Stromfluss.
- Es muss ein elektrisch geschlossener Kreis vorhanden sein, ansonsten kann kein Strom fließen.
- Der Knotenpunkt hat keine Speicherwirkung und hat auch keine Verluste.
- Die in den Knotenpunkt hineinfließenden Ströme erhalten ein positives Vorzeichen, die herausfließenden ein negatives.
- Für jeden Knotenpunkt lässt sich eine eigene Knotenpunktgleichung aufstellen.
- Die Anzahl der unabhängigen Knotenpunktgleichungen entspricht der Anzahl der Knoten minus 1.

Mithilfe der beiden Kirchhoffschen Sätze lassen sich elektrische Schaltungen berechnen. Oft sind die Spannungsquellen bekannt und die Beschriftung ist auf den Widerständen gut lesbar. Spannungen lassen sich in der Praxis grundsätzlich leicht bestimmen, da ein Voltmeter parallel geschaltet wird und keinerlei Unterbrechung der Schaltungsfunktionalität erfolgt. Bei Strommessungen muss der Stromkreis für das Amperemeter unterbrochen werden.

7.2.2 Der 2. Kirchhoffsche Satz

Die Summe aller Spannungen einer Masche ist gleich null.

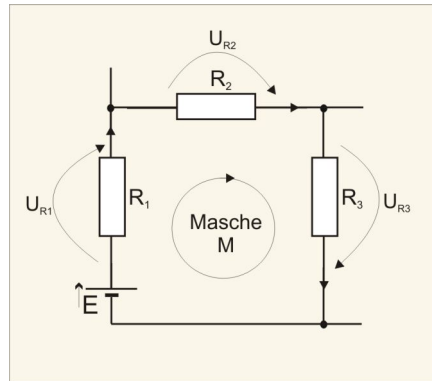


Abbildung 22: Die Maschengleichung für eine Masche

Maschengleichung:

$$0 = E - U_{R_1} - U_{R_2} - U_{R_3}$$

$$E = U_{R_1} + U_{R_2} + U_{R_3}$$

$$E = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3$$

Für eine Schaltung mit zwei Maschen gilt:

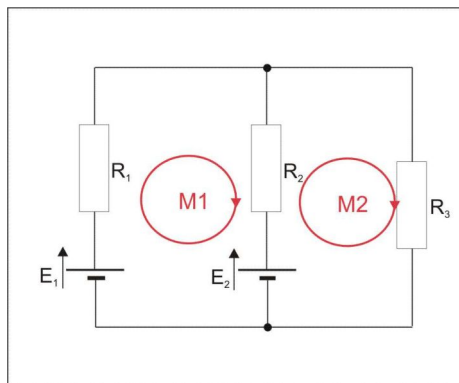


Abbildung 23: Die Maschengleichungen für zwei Maschen

Maschengleichungen:

$$M1 : \quad 0 = E_1 - E_2 + U_{R_1} + U_{R_2} \quad \Rightarrow \quad E_1 - E_2 = U_{R_1} + U_{R_2}$$

$$M2 : \quad 0 = E_2 + U_{R_2} - U_{R_3} \quad \Rightarrow \quad E_2 = -U_{R_2} + U_{R_3}$$

Unter dem 2. Kirchhoffschen Satz verbirgt sich die Spannungsteilerregel:

Die Teilspannung über einem stromdurchflossenen Widerstand verhält sich zur verfügbaren Gesamtspannung, wie der Teilwiderstand zur Summe der betrachteten Reihenschaltung von Widerständen.

7.3 Der Schwarze Strahler

Das genaue Messen von Temperaturen ist in der Praxis eine der wichtigsten Aufgaben. Die Temperatur gehört, wie der Druck, zu den bedeutendsten Prozessgrößen. Nicht alle Temperaturen lassen sich direkt messen, d.h. nicht alle Medien können berührt werden. Eine Alternative ist die Temperaturmessung im infraroten Wellenbereich mittels Pyrometer, Bolometer oder IR-Kamera.

Gemessen wird mit diesen Geräten die Intensität der elektromagnetischen Strahlung, die ein Medium mit einem Wärmegehalt größer null ausstrahlt (emittiert). Kirchhoff schuf ein Modell, das die höchste Emissionseigenschaft (Emissionsgrad $\epsilon = 1$) besitzt – den Schwarzen Körper bzw. den Schwarzen Strahler. Er ist eine ideale thermische Strahlungsquelle, die elektromagnetische Strahlung mit einem charakteristischen, nur von der Temperatur abhängigen Spektrum aussendet, und dient als Grundlage für theoretische Betrachtungen sowie als Referenz für praktische Untersuchungen elektromagnetischer Strahlung.

Die idealen Eigenschaften des Schwarzen Körpers können nur angenähert realisiert werden, z. B. in begrenzten Frequenzbereichen. Nach dem „Kirchhoffschen Strahlungsgesetz“ ist für jeden realen Körper bei jeder Wellenlänge und in jeder Richtung das Emissionsvermögen für thermische Strahlung proportional zu seinem Absorptionsvermögen. Da das Absorptionsvermögen des Schwarzen Körpers bei jeder Wellenlänge den größtmöglichen Wert annimmt, ist auch sein Emissionsvermögen bei allen Wellenlängen das größtmögliche. Ein beliebiger realer Körper kann also bei keiner Wellenlänge mehr thermische Strahlung aussenden als ein Schwarzer Körper. Er ist die ideale thermische Strahlungsquelle.

Körper mit einer Oberfläche, die elektromagnetische Wellen gut emittieren, sind auch gute Absorber.

8 Anhang: Laplace-Korrespondenztabelle

Nr.	Bildbereich	Originalbereich
1	$\frac{1}{p}$	1 für $\text{Re } p > 0$
2	$\frac{1}{p^2}$	t für $\text{Re } p > 0$
3	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ für $\text{Re } p > 0$
4	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{p-a}$	$\left. \begin{array}{l} e^{at} \\ e^{-at} \end{array} \right\} \text{Re } p > \text{Re } a$
7	$\frac{1}{p+a}$	
8	$\frac{1}{ap+1}$	$\frac{1}{a} e^{-t/a}$
9	$\frac{1}{p(p-a)}$	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$
10	$\frac{1}{p^2(p-a)}$	$\frac{1}{a^3} (e^{at} - at - 1)$
11	$\frac{1}{p(p-a)^2}$	$\frac{1}{a^2} [1 + (at-1)e^{at}]$
12	$\frac{1}{p(ap+1)}$	$1 - e^{-t/a}$
13	$\frac{1}{p(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{ab} \left(1 + \frac{b e^{at} - a e^{bt}}{a-b} \right)$
14	$\frac{1}{p(ap+1)(bp+1)}$	$1 + \frac{a e^{-t/a} - b e^{-t/b}}{b-a}$
15	$\frac{1}{p^2(ap+1)}$	$a e^{-t/a} + t - a$
16	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t e^{at}$
17	$\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{at}$
18	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$

Nr.	Bildbereich	Originalbereich
19	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\frac{1}{2} (e^{at} - e^{-at}) = \sinh at$
20	$\frac{a^2}{p(p^2 + a^2)}$	$1 - \cos at$
21	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$	$\sin^2 at$
22	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$	$t - \frac{1}{a} \sin at$
23	$\frac{a^4}{p(p^2 + a^2)^2}$	$1 - \cos at - \frac{at}{2} \sin at$
24	$\frac{1}{(1 + ap)^2}$	$\frac{1}{a^2} t e^{-t/a}$
25	$\frac{1}{(ap + 1)^3}$	$\frac{1}{2a^3} t^2 e^{-t/a}$
26	$\frac{1}{p(ap + 1)^2}$	$1 - \frac{a + t}{a} e^{-t/a}$
27	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$
28	$\frac{1}{(ap + 1)(bp + 1)}$	$\frac{e^{-t/a} - e^{-t/b}}{a - b}$
29	$\frac{1}{p^2 + \alpha p + \beta}; \text{ für } \frac{1}{4} \alpha^2 - \beta > 0$	$\frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}} \sinh \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} t$
30	$\frac{1}{p^2 + \alpha p + \beta} \text{ für } \frac{1}{4} \alpha^2 - \beta < 0$	$\frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}} t$
31	$\frac{1}{\sqrt{p + a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
32	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
33	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\frac{1}{2} (e^{at} + e^{-at}) = \cosh at$
34	$\frac{bp + c}{p^2 + a^2}$	$b \cos at + \frac{c}{a} \sin at$
35	$\frac{bp + c}{p(p - a)}$	$-\frac{c}{a} + \left(b + \frac{c}{a}\right) e^{at}$

Nr.	Bildbereich	Originalbereich
36	$\frac{p}{(p-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
37	$\frac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
38	$\frac{bp+c}{(p-a)^2}$	$[b+(ab+c)t]e^{at}$
39	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
40	$\frac{p+c}{p^2+\alpha p+\beta}$ für $\frac{\alpha^2}{4}-\beta > 0$	$\frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\gamma} \left[\left(c - \frac{\alpha}{2}\right) \sinh \gamma t + \gamma \cosh \gamma t \right]$ mit $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}$
41	$\frac{p+c}{p^2+\alpha p+\beta}$ für $\frac{\alpha^2}{4}-\beta < 0$	$\frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\gamma_1} \left[\left(c - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \gamma_1 t + \gamma_1 \cos \gamma_1 t \right]$ mit $\gamma_1 = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$
42	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$-\frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
43	$\frac{1}{(ap+1)(bp+1)(cp+1)}$	$\frac{a(b-c)e^{-t/a} + b(c-a)e^{-t/b} + c(a-b)e^{-t/c}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
44	$\frac{1}{p(p^2+\alpha p+\beta)}$ für $\frac{\alpha^2}{4}-\beta > 0$	$\frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{2} \sinh \gamma t + \gamma \cosh \gamma t \right) \right]$ mit $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}$
45	$\frac{1}{p(p^2+\alpha p+\beta)}$ für $\frac{\alpha^2}{4}-\beta < 0$	$\frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\gamma_1} \left(\frac{\alpha}{2} \sin \gamma_1 t + \gamma_1 \cos \gamma_1 t \right) \right]$ mit $\gamma_1 = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$
46	$\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{a(b-c)e^{at} + b(c-a)e^{bt} + c(a-b)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
47	$\frac{p}{(ap+1)(bp+1)(cp+1)}$	$\frac{(c-b)e^{-t/a} + (a-c)e^{-t/b} + (b-a)e^{-t/c}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
48	$\frac{p+c}{p(p^2+\alpha p+\beta)}$ für $\frac{\alpha^2}{4}-\beta > 0$	$\frac{c}{\beta} \left\{ 1 - \frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\gamma} \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{c} \right) \sinh \gamma t + \gamma \cosh \gamma t \right] \right\}$ mit $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}$

Nr.	Bildbereich	Originalbereich
49	$\frac{p+c}{p(p^2+\alpha p+\beta)}$ für $\frac{\alpha^2}{4}-\beta < 0$	$\frac{c}{\beta} \left\{ 1 - \frac{e^{-(\alpha/2)t}}{\gamma_1} \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{c} \right) \sin \gamma_1 t + \gamma_1 \cos \gamma_1 t \right] \right\}$ mit $\gamma_1 = \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$
50	$\frac{p^2}{(p-a)^3}$	$\left(1 + 2at + \frac{a^2 t^2}{2} \right) e^{at}$
51	$\frac{(p+a)^2}{p(p-a)^2}$	$1 + 4at e^{at}$
52	$\frac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\cos^2 at$
53	$\frac{(p+a)^2}{p(p^2+a^2)}$	$1 + 2 \sin at$
54	$\frac{ap}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \sin at$
55	$\frac{ap^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sin at + at \cos at)$
56	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{at}{2} \sin at$
57	$\frac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2} \left(e^{-at} - \cos bt + \frac{a}{b} \sin bt \right)$
58	$\frac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\frac{a}{a^2+b^2} \left(-e^{-at} + \cos bt + \frac{b}{a} \sin bt \right)$
59	$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{ab(a^2-b^2)}$
60	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}$
61	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2-b^2}$
62	$\ln \frac{p-a}{p}$	$\frac{1-e^{at}}{t}$
63	$\ln \frac{p-a}{p-b}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$
64	$\ln \frac{p^2+a^2}{p^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \cos at)$
65	$\arctan \frac{a}{p}$	$\frac{\sin at}{t}$

9 Abkürzungsverzeichnis

1/e Reziprokwert der Konstante e; $\frac{1}{e} \approx 0,36788$

C Die Kapazität C als Bauelement mit der Bemessungsgleichung $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$; aber auch als resultierende Integrationskonstante

E Elektromotorische Kraft (EMK), die Gleichspannungsquelle

tau unabhängig vom System, ist es eine Zeitkonstante, die die Energiespeicherung charakterisiert

h(t) Gesamtfunktion, bestehend aus der stationären Teilfunktion $h_{stat}(t)$ und der flüchtigen $h_f(t)$

K Konstante

L Die Induktivität als Bauelement mit der Bemessungsgleichung $L = \mu_0 \mu_r \frac{A}{l}$; A stellt die durchströmte Fläche dar, l die Länge der magnetischen Feldlinie

P Die elektrische Leistung

Q Die elektrische Ladung eines Kondensators

t Die Zeit

u Der Buchstabe u ohne dem Zusatz (t) entspricht dem Substitut eines komplexeren Ausdrucks.

VDI Verein Deutscher Ingenieure

W Die elektrische Arbeit

Literatur

- [1] *Küpfmüller, K* - Einführung in die theoretische Elektrotechnik; 5. Auflage; Springer Verlag
- [2] *Lunze, K.; Wagner, E.* - Einführung in die Elektrotechnik; 2. Auflage; Verlag Technik Berlin
- [3] *Lunze, K.* - Einführung in die Elektrotechnik; 11. Auflage; Verlag Technik Berlin
- [4] *Grafe, Loose, Kühn* - Grundlagen der Elektrotechnik - Band I: Gleichspannungstechnik; 13. Auflage; Verlag Hüthig
- [5] *Grafe, Loose, Kühn* - Grundlagen der Elektrotechnik - Band II: Wechselspannungstechnik; 9. Auflage; Verlag Hüthig
- [6] *Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.* - Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harri Deutsch
- [7] *Stuchlik, W.;* - Mathematische Methoden zur Bestimmung von Strömen und Spannungen in Schaltungen mit passiven Bauelementen